Les Cartes mentales de la Corpo

Chers étudiants, ça y est, le semestre touche à sa fin. Mais pour bien profiter de l'été et éviter les rattrapages, la case des partiels semble inévitable !

Depuis maintenant 90 ans la Corpo Assas accompagne les étudiants dans tous les domaines de la vie universitaire, et pour la première fois cette année on vous propose des cartes mentales. Ces fiches sont écrites par nos membres dans le but de favoriser l'entraide étudiants ainsi que de vous aider dans l'apprentissage de certaines notions clés d'une matière.

Effectivement, ces fiches sont là pour vous orienter, elles sont faites par des étudiants et ne sont en aucun cas un substitut à ce qui a été enseigné en TD ou en cours.

Si jamais il vous venait des questions, n'hésitez pas à nous envoyer un message sur la page Facebook Corpo Assas ou à contacter *Gabrielle Manbandza* ou *Angélique Polide*.

" **Comment valider votre année ?** Pour les L1 :

Il faut tout d'abord rappeler que toutes vos notes se compensent. Pour valider de la manière la plus simple votre année, il vous faut valider votre bloc de matières fondamentales mais aussi votre bloc de matières complémentaires. Cependant, le calcul peut s'avérer plus complexe...

Chaque fin de semestre est marquée par des examens qui constituent l'épine dorsale de la validation de votre année. Bon nombre d'autres possibilités vous sont proposées pour engranger un maximum de points et limiter ainsi l'impact de vos partiels. Chacun de vos chargés de TD va vous attribuer une note sur 20 à l'issue du semestre. Vos TD de matières fondamentales comptent donc autant que l'examen écrit, lui aussi noté sur 20. Cet examen s'effectue en 3h et nécessite un exercice de rédaction. Sur un semestre, une matière fondamentale peut donc vous

rapporter jusqu'à 40 points. Seuls 20 points sont nécessaires à la validation de la matière. Pour valider votre bloc de fondamentales, il vous faut donc obtenir 40 points en additionnant vos notes de TD et vos notes aux partiels. Si toutefois vous n'obtenez pas ces 40 points, vous repasserez en juillet lors de la session de rattrapage, la ou les matières que vous n'auriez pas validée(s).
Attention : le passage par juillet annule votre note de TD obtenue dans la matière.

Pour les L2 :

Le principe est similaire, à la différence qu'il y a plus de matières fondamentales et plus de matières complémentaires.
Conclusion simple : travailler toutes les matières un minimum en mettant l'accent sur les TD et les matières fondamentales (les plus gros coefficients) vous permettra de maximiser vos chances de valider votre année du premier coup et ainsi éviter l'écueil des rattrapages de juillet.

Si, au sein même des unités d'enseignement, les matières se compensent, les blocs peuvent aussi se compenser entre eux à la fin de l'année. Ainsi, si vous obtenez une moyenne générale sur l'année de 10/20, votre passage est assuré.

En cas d'échec lors des sessions de janvier et de juin, une seconde chance vous est offerte en juillet.

Attention, contrairement aux idées reçues, les rattrapages ne sont pas plus faciles, ils sont connus pour être notés plus sévèrement. Toutes les matières des blocs non validés où vous n'avez pas eu la moyenne sont à repasser. S'il s'agit d'une matière à TD, la note de TD est annulée (même si vous avez été défaillant), de sorte que la note obtenue en juillet compte double (8/20 revient à 16/40). Les points d'avance acquis lors de l'année (points au-dessus de la moyenne lors de la validation d'un bloc) sont valables après les rattrapages et permettent donc la compensation finale comme décrite précédemment.

A noter que le jury peut vous accorder quelques points pour l'obtention de votre année, notamment dans le cas d'un étudiant sérieux en TD... A bon entendeur !

Pour les L1, le passage en deuxième année peut aussi se faire en conditionnel, pour cela il vous faut valider les deux unités d'enseignement fondamental et une unité d'enseignement complémentaire tout en sachant que l'autre unité complémentaire sera à repasser en L2.

AVERTISSEMENT

Il est important de rappeler que les Professeurs et Maitres de conférence ne sauraient être tenus responsables d'une erreur ou d'une omission au sein des fiches de cours proposées, puisque ces dernières sont comme dit précédemment, réalisées, relues, et mises en page par des étudiants appartenant à la Corpo Paris Assas.

REMERCIEMENTS

La Corpo Paris Assas souhaiterait remercier sincèrement l'intégralité des professeurs ayant permis et autorisé la diffusion de ces fiches de cours et d'avoir ainsi offert aux étudiants une aide précieuse à la réussite de leur examens.

Diagonalisation d'une matrice carrée

1. Valeurs propres et vecteurs propres

- $A_{\vec{v}} = \lambda_{\vec{v}}$
- λ= valeur propre,$\vec{v} \neq 0$ = vecteur propre
- Eλ=ker(A−λI)

2. Polynôme caractéristique

- $P_A(\lambda)$= det(A−λI)
- Racines de $P_A(\lambda)$ = valeurs propres

5. Matrices symétriques

- A=A^T
- Toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$
- A=PDP^T

3. Diagonalisation

- A=PDP^{-1}
- D = matrice diagonale (valeurs propres)
- P = colonnes = vecteurs propres

Conditions :

- A a n valeurs propres réelles
- dim E_λ= multiplicité de λ

4. Cas particuliers

- Si A a n valeurs propres distinctes → diagonalisable
- Si valeurs complexes → pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$
- Si une dim E_λ < multiplicité → pas diagonalisable

Formes quadratiques

1. Définition

q($\vec{x}$)=$\sum a_{ij}x_i x_j$

Associée à une **matrice symétrique** A

Écriture : q($\vec{x}$)=$X^T AX$

2. Classification

D'après les **valeurs propres** de A :

Type	**Valeurs propres**
Définie positive	Toutes >0
Semi-définie positive	Toutes ≥0
Définie négative	Toutes <0
Semi-définie négative	Toutes ≤0
Indéfinie	Signes **opposés**

3. Méthodes d'analyse

- **Valeurs propres** de A
- **Déterminant et trace** (si 2×2)
- **Mineurs principaux** : det($A^{(p)}$)

4. Critères rapides pour 2×2

- det>0, trace>0→ définie positive
- det<0 → indéfinie
- det=0, trace>0 → semi-définie positive
- (et symétrique pour tous les cas)

Suites et Séries

SUITES

Définition

- Application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
- Notation : (u_n)
- Définitions :
  - Terme général
  - Récurrence

Types

- Croissante / Décroissante
- Monotone
- Majorée / Minorée / Bornée
- Convergente ($\lim u_n = a$)
- Divergente ($\neq$ limite finie)

Limites

- Unicité
- Toute suite convergente est bornée
- Propriétés :
  - Somme, produit, quotient
  - Théorème des gendarmes

Exemples

- $u_n = (1 + 1/n)^n \to e$
- $u_n = n/2^n$ décroissante

Suites particulières

- Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$
- Géométrique : $u_n = u_0 \times r^n$

SÉRIES

Définition

- Somme des u_n : $S_n = \sum u_k$ de 0 à n
- Convergence $\leftrightarrow$ suite (S_n) converge
- Notation : $\sum u_n$

Série de Riemann : $\sum 1/n^\alpha$

- Converge si $\alpha > 1$
- Diverge sinon

Exemples

- $\sum r^n u_0$: converge si $|r|<1 \to u_0/(1-r)$
- $\sum 1/n^2$ converge ; $\sum 1/n$ diverge

Séries alternées

- Critères :
  - Alternance de signe
  - $(|u_n|)$ décroissante
  - $\lim u_n = 0$
- Peut être convergente mais pas absolument

Critères de convergence

- **Condition nécessaire** : $\lim u_n = 0$
- **Comparaison** $(u_n \leq v_n)$
- **Convergence absolue** : $\sum |u_n|$
- **Cauchy** : $\lim (|u_n|)^{(1/n)}$
- **D'Alembert** : $\lim |u_{n+1}/u_n|$

GÉNÉRALITÉS

- **Définitions**
  - Ordre 1 : $u_{n+1} + a \cdot u_n = \varphi(n)$
  - Ordre 2 : $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = \varphi(n)$
  - Homogène si $\varphi(n) = 0$
- **Théorème d'existence et unicité**
  - Ordre 1 : un seul $u_0 \Rightarrow$ solution unique
  - Ordre 2 : u_0 et u_1 donnés $\Rightarrow$ solution unique

SOLUTION GÉNÉRALE & UNIQUE

- **Forme générale** : $u_n = v_n + w_n$
- **Forme unique** : u_n déterminée avec conditions initiales (identifie c_1, c_2)

Équations de récurrence linéaires

ÉQUATION D'ORDRE 1

- **Solution générale** = solution homogène + solution particulière
  - $u_n = v_n + w_n$

1. Solution de l'équation homogène :

- $v_n = k \cdot (-a)^n$ (suite géométrique)

2. Solution particulière :

- Si $\varphi(n) = r^n \cdot P(n)$:
  - $w_n = r^n \cdot Q(n)$ si $r \neq -a$
  - $w_n = n \cdot r^n \cdot Q(n)$ si $r = -a$
  - Q même degré que P

Exemple :

- $\varphi(n) = 4n^2 \Rightarrow$ P degré 2 $\Rightarrow$ Q degré 2

ÉQUATION D'ORDRE 2

- **Forme** : $u_{n+2} + a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n = \varphi(n)$
- **Équation caractéristique** : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

1. Solution homogène :

- Selon le discriminant Δ :
  - $\boldsymbol{\Delta > 0}$ (2 racines réelles $\lambda_1 \neq \lambda_2$) : $v_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$
  - $\boldsymbol{\Delta = 0}$ (racine double λ) : $v_n = c_1\lambda^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda^n$
  - $\boldsymbol{\Delta < 0}$ (racines complexes conjuguées) : $v_n = |\lambda|^n (c_1 \cdot \cos(n\theta) + c_2 \cdot \sin(n\theta))$

2. Solution particulière :

- Si $\varphi(n) = r^n \cdot P(n)$, alors :
  - $w_n = r^n \cdot Q(n)$ si $r \neq$ racine
  - $w_n = n \cdot r^n \cdot Q(n)$ si $r =$ racine simple

Équation différentielles linéaire d'ordre 1

Méthode de la variation de la constante

On pose : y(x)=k(x)$e^{-\int a(x)dx}$

Alors : $k'(x)= e^{-\int a(x)dx}.\varphi(x) \Rightarrow k(x)=\int e^{-\int a(x)dx}\varphi(x)dx + C$

Donc : $y(x)= [\int e^{\int a(x)dx}\varphi(x)\,dx+C]\, e^{-\int a(x)dx}$

Existence et unicité

- Si φ est continue :
  - Pour x0, y0, il existe une unique solution y vérifiant y(x0) = y0
  - Solution explicite :

$$y(x) = \left[y0 + \int_{x0}^{x} e^{a(t-x0)}\varphi(t)dt\right] e^{-a(x-x0)}$$

Définitions générales

- Forme générale : y'(x)+a(x)y(x) = φ(x)
  - Inconnue : y(x), fonction dérivable.
  - a(x), $\varphi(x)$ données
  - Homogène si $\varphi(x)$=0
- A coefficients constants : y'+ay= $\varphi(x)$
  Avec $a \in \mathbb{R}$

Solution générale & unique

Forme générale : y(x)=z(x)+w(x)

Si y(x0)=y0 , on identifie la constante k

Méthode de résolution (coefficients constants)

1. Équation homogène associée :
$z'(x) + az(x) = 0 \Rightarrow z(x) = ke^{-ax}$
L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1, de base $\{e^{-ax}\}$

2. Solution particulière :

Si $\varphi(x)=e^{rx}P(x)$, alors : $w(x) = \begin{cases} e^{rx}Q(x) si r \neq -a \\ xe^{rx}Q(x) si r = -a \end{cases}$

où Q(x) est un polynôme de même degré que P(x)

3. Cas particuliers :

- Si φ(x)=c, alors : $w(x) = \begin{cases} \gamma \ si\ a \neq 0 \\ \gamma x \ si\ a = 0 \end{cases}$
- Si φ(x)=P(x) alors : : $w(x) = \begin{cases} Q(x) \ si\ a \neq 0 \\ xQ(x) \ si\ a = 0 \end{cases}$

Cas des coefficients non constants

Même méthode que pour le cas constant, avec a(x) général :

- Solution homogène : z(x)=k$e^{-\int a(x)dx}$
- Solution générale : $y(x) = [\int e^{\int a(x)dx}\varphi(x)dx + C]\, e^{-\int a(x)dx}$

Équation différentielles linéaires d'ordre 2

Existence et unicité

- Si φ est continue sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x0 \in \mathbb{R}$, $y0, y1 \in \mathbb{R}, il$ existe une unique solution y vérifiant :

y(x0) = y0 et y'(x0) = y1

Structure de la solution

- Solution générale de l'équation : y(x)=z(x)+w(x)
  - z(x) : solution de l'équation homogène
  - w(x): solution particulière de l'équation complète

Solution générale et identification

- Forme générale : y(x) = z(x)+w(x)
- Pour déterminer c1, c2, on utilise : y(x0) = y0, y'(x0) = y1

Définition générale

- Forme générale : y''(x) + ay'(x) + by(x) = $\varphi(x)$
- Inconnue : y(x), fonction de classe C^2
- a, b $\in \mathbb{R}, \varphi \;\to \mathbb{R}$

Équation homogène associée

- Équation caractéristique : λ2+aλ+b = 0
- Trois cas selon le discriminant $\Delta = a^2 - 4b$:
  - Cas 1 : Δ > 0 ; z(x) = c1eλ1x+
  - Cas 2 : Δ = 0 ; z(x) = $c1e^{\lambda 1x} + c2xe^{\lambda 2x}$
  - Cas 3 : Δ < 0, λ = α ± iβ ; z(x) = $e^{ax}(c1\ cos(\beta x)\ +$

Cas particulier : a = b = 0

- L'équation devient $y''(x) = \varphi(x)$
- Résolution directe par deux primitives successives

Exemple : $y''(x) = 4 \Rightarrow y'(x)$=4x+c, y(x)=$2x^2 + cx + d$

Solution particulière

- Si φ(x)=$e^{rx}P(x)$, alors : w(x) =

$$\begin{cases} e^{rx}Q(x)\ si\ r\ n'est\ pas\ racine\ de\ l'équation\ crctéristique \\ xe^{rx}Q(x)\ si\ r\ est\ racine\ simple \\ x^2e^{rx}Q(x)\ si\ r\ est\ racine\ double \end{cases}$$

- Q(x): polynôme de même degré que P(x)