

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit E et F des espaces vectoriels tels que $\dim E = n$ $\dim F = m$.

Soit $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E .

Soit ϕ une application linéaire de E dans F .

- Donner la définition de ϕ surjective.
- Donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que ϕ soit surjective.
- Montrer que ϕ est injective si et seulement si $\{\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_n)\}$ est un système libre de F .

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que:

$$f(\vec{u}) = f(x, y, z) = (z - x, y - 2z, x - y + z, x - z).$$

- Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
- Déterminer $\text{Ker } f$. En donner une base et la dimension.
- Quelle est la dimension de $f(\mathbb{R}^3)$?
- Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$.
- f est-elle injective, surjective, bijective?
- Calculer la matrice A représentant f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer $\det(A)$.
- Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible? Dans ce cas calculer l'inverse de A en fonction de m .
- Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (départ et arrivée) est la matrice A . Déterminer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4

- On rappelle que $\mathcal{M}(3, 3)$ est l'espace vectoriel des matrices $(3, 3)$. Quelle est sa dimension?
- Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, 3)$:

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b - 4c & a \\ a & a & a \\ a & c - 4b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, 3) / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- Donner une base de cet espace.
- Quelle est la dimension de cet espace?
- Que vaut $\det(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$? Justifier la réponse.