Université Paris-PANTHÉON-ASSAS
Droit-Economie-Sciences Sociales

U.E.F.1/5009
ASSAS-MELUN

Session:	Décembre 2024.
Année d'étude:	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline:	**Statistiques 3** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 1).
Titulaire du cours:	M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Documents interdits, ainsi que tout autre appareil électronique.

Examen de Statistique 3 (5009): session décembre 2024. Durée 1h30.

Ce sujet est écrit sur 2 pages.

Exercice 1. (1 pt) Choisissez à chaque fois la bonne réponse (sans justifier : recopier simplement le numéro de la réponse correcte).

I. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{C}, P)$: pour deux évènements $A, B \in \mathscr{C}$, avec $1 > P(B) > P(A) > 0$, et $A \subset B$:
(1) $P(A|B) = P(A)$,
(2) $P(B|A) = 1$,
(3) $P(B \setminus A|A) > P(A)$, où $B \setminus A = \{w \in B : w \notin A\}$.

II. Pour trouver un intervalle contenant 95% des valeurs de la variance empirique modifiée, nous utilisons :
(4) La loi de χ^2,
(5) La loi de Student,
(6) La loi normale.

Exercice 2. (3,5 pts) – Dans cet exercice, si nécessaire, on arrondit à 10^{-2} : 2 chiffres après la virgule—

Pour distribuer un lot de 10 cadeaux sur un groupe de 10 hommes et 10 femmes, on tire au sort 10 fois une personne dans ce groupe. La personne tirée au sort est remise à chaque fois dans le groupe (tirages indépendants). (une même personne peut recevoir plusieurs cadeaux)

I.a) Quelle est la probabilité que les femmes gagnent 4 cadeaux sur les 10 tirages?
I.b) Quelle est l'espérance et la variance du nombre de cadeaux obtenus par les femmes sur les 10 tirages?

II. On modifie l'expérience précédente en tirant au sort à chaque fois, d'un coup, un échantillon de 10 personnes (dans le même groupe composé de 10 hommes et 10 femmes). L'échantillon est remis dans le groupe s'il ne respecte pas l'équité homme-femme (5 hommes et 5 femmes), l'expérience est reproduite donc dans des conditions d'indépendance. On note W la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire jusqu'à l'obtention d'un échantillon respectant l'équité homme-femme.

II.a) Donner $P(W = 3)$
II.b) Donner $E(W)$ et $V(W)$.

Exercice 3. (4 pts) Un poste de secours d'une plage observe un temps aléatoire T_α (α est un paramètre réel) avant qu'un incident se produise. On donne la probabilité $F_\alpha(t)$, définie en tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$F_\alpha(t) = P(T_\alpha \leq t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 0, \\ \alpha t, \text{ si } t \in [0, 1[, \\ \frac{t}{t+2}, \text{ si } t \in [1, +\infty[, \end{cases}$$

1. Donner les valeurs possibles de α.

2. Dans la suite, on fixera α de sorte que la fonction F_α soit continue. On désignera simplement par F et T les fonctions correspondantes.

2.a. Donner la valeur de α qui vient juste d'être décrite.

2.b. Donner la densité de T.

2.c. Donner la probabilité qu'un incident se produit entre $t_1 = \frac{1}{2}$ et $t_2 = 3$.

2.d. Des secours extérieurs peuvent intervenir, en cas d'un incident au temps T, dans un temps $\overline{T} = e^T$. Donner la densité de $\overline{T}$.

Exercice 4. (2 pts) (Donner toutes les réponses correctes (recopier les numéros (lettres) des réponses correctes sans justifier). I et II sont indépendants. Pour I et pour II, le point est attribué uniquement si toutes les bonnes réponses sont données, et aucune mauvaise réponse n'est donnée.).

I. Si X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent toutes $N(10,4)$, alors,

1. $\frac{(X_1-10)^2}{(X_2-10)^2+(X_3-10)^2} \rightsquigarrow F(1,3)$

2. $\frac{(X_1-10)^2}{(X_2-10)^2+(X_3-10)^2} \rightsquigarrow F(3,1)$

3. $4\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2} \rightsquigarrow F(1,2)$.

4. $\frac{(X_1-10)^2}{(X_2-10)^2+(X_3-10)^2} \rightsquigarrow F(1,3)$

5. $2\frac{(X_1-10)^2}{(X_2-10)^2+(X_3-10)^2} \rightsquigarrow F(1,2)$

6. $\frac{(X_2-10)^2+(X_3-10)^2}{16} \rightsquigarrow \chi_2^2$.

II. Considérons une variable aléatoire réelle X suivant $N(\mu,\sigma)$ et $X_1, ..., X_n$ un échantillon aléatoire de taille n de X. Notons $\overline{X}$ et S^2 la moyenne et la variance empirique modifiée correspondantes (ainsi $S = \sqrt{S^2}$). Alors,

a) $\frac{\overline{X}-\mu}{S} n \rightsquigarrow T_n$.

b) $\frac{\overline{X}-\mu}{S^2}\sqrt{n} \rightsquigarrow T_{n-1}$.

c) $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \rightsquigarrow T_{n-1}$

d) $\frac{(n-1)S}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{n-1}^2$.

e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{n-1}^2$

f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_n^2$

g) $\overline{X} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.