

Statistiques 2 - Examen

Durée : 1h30 - Calculatrices autorisées

*La barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.**Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte dans la notation.*

Cours

- (1 point) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et P une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$.
À quelle(s) condition(s) P est-elle une mesure de probabilité?
- (1 point) Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Donner le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- (1 point) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, B, C \in \mathcal{A}$ trois événements.
À quelle(s) condition(s) A, B, C sont-ils mutuellement indépendants?
- (2 points) Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ vérifie $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

Exercice 1 (Probabilités conditionnelles)

Au Loto, les joueurs parient sur le résultat de 6 tirages : cinq (sans ordre et sans remise) dans une urne U_1 contenant 49 éléments distincts et un dans une urne U_2 contenant 10 autres éléments distincts. Un gagnant du Loto est accusé d'avoir triché et le procureur affirme que la probabilité pour que l'individu soit innocent est : $p = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ où Ω désigne l'ensemble des issues possibles.

- (1 point) Montrer que $\text{Card}(\Omega) = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 15 \cdot 12 = 19068840$ (d'où $p \approx 0,000005$).
- (1 point) À quelle probabilité, exprimée en fonction des événements G : "l'individu remporte le Jackpot" et I : "l'individu est innocent", correspond en réalité la valeur p ?
- (1 point) On suppose que la proportion de joueurs honnêtes est $\alpha \in]0, 1[$ et qu'un tricheur est sûr de gagner. Déterminer la probabilité qu'un joueur quelconque gagne le Jackpot (en fonction de α).
- (2 points) Dédurre des question précédentes la probabilité que l'accusé soit innocent. Pour quelle valeur de α celle-ci vaut-elle p ?

Exercice 2 (Variables aléatoires discrètes)

On tire simultanément trois balles dans une urne contenant 4 balles rouges, 5 balles vertes et 6 balles bleues. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de couleurs distinctes obtenues (par exemple, si ω désigne un tirage comportant 1 rouge et 2 vertes alors $X(\omega) = 2$).

- (3 points) En supposant que toutes les balles ont autant de chances d'être tirées, montrer que

$$P(X = 1) = \frac{34}{455}, \quad P(X = 2) = \frac{301}{455}, \quad P(X = 3) = \frac{120}{455}.$$

- (1 point) Déterminer et représenter graphiquement F_X .
- (1 point) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
- (1 point) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{5}{X}\right)$.

Exercice 3 (Variables aléatoires continues)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{2x+1} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

- (2 points) Montrer que F_X est continue si et seulement si $\alpha = e^{-3}$. Montrer que dans ce cas, X est absolument continue en déterminant une fonction de densité pour P_X .
- (2 points) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
- (2 points) Soit $Y = (X - 1)^2$. En utilisant F_X , $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$, déterminer $F_Y(1)$ et $\mathbb{E}(Y)$.