Les Fiches notions de la Corpo

Chers étudiants, ça y est, le semestre touche à sa fin. Mais pour bien profiter de l'été et éviter les rattrapages, la case des partiels semble inévitable !

Depuis maintenant 90 ans la Corpo Assas accompagne les étudiants dans tous les domaines de la vie universitaire, et pour cette année on vous propose des fiches notions. Ces fiches sont écrites par nos membres dans le but de favoriser l'entraide étudiante ainsi que de vous aider dans l'apprentissage de certaines notions clés d'une matière, sans reprendre le cours du professeur.

Effectivement, ces fiches sont là pour vous orienter, elles sont faites par des étudiants et ne sont en aucun cas un substitut à ce qui a été enseigné en TD ou en cours car elles ne se basent que sur les recherches et l'apprentissage personnelles de nos membres.

Si jamais il vous venait des questions, n'hésitez pas à nous envoyer un message sur la page Facebook Corpo Assas ou à contacter *Angèle Thiollier* ou *Lina Cherkaoui*.

Comment valider votre année ?

Pour les L1 :
Il faut tout d'abord rappeler que toutes vos notes se compensent. Pour valider de la manière la plus simple votre année, il vous faut valider votre bloc de matières fondamentales mais aussi votre bloc de matières complémentaires. Cependant, le calcul peut s'avérer plus complexe...

Chaque fin de semestre est marquée par des examens qui constituent l'épine dorsale de la validation de votre année. Bon nombre d'autres possibilités vous sont proposées pour engranger un maximum de points et limiter ainsi l'impact de vos partiels. Chacun de vos chargés de TD va vous attribuer une note sur 20 à l'issue du semestre. Vos TD de matières fondamentales comptent donc autant que l'examen écrit, lui aussi noté sur 20. Cet examen s'effectue en 3h et nécessite un exercice de rédaction. Sur un semestre, une matière fondamentale peut donc vous rapporter jusqu'à 40 points. Seuls 20 points sont nécessaires à la validation de la matière. Pour valider votre bloc de fondamentales, il vous faut donc obtenir 40 points en additionnant vos notes de TD et vos notes aux partiels. Si toutefois vous n'obtenez pas ces 40 points, vous repasserez en juillet lors de la session de rattrapage, la ou les matières que vous n'auriez pas validée(s).

Attention : le passage par juillet annule votre note de TD obtenue dans la matière.

Pour les L2 :

Le principe est similaire, à la différence qu'il y a plus de matières fondamentales et plus de matières complémentaires.

Conclusion simple : travailler toutes les matières un minimum en mettant l'accent sur les TD et les matières fondamentales (les plus gros coefficients) vous permettra de maximiser vos chances de valider votre année du premier coup et ainsi éviter l'écueil des rattrapages de juillet.

Si, au sein même des unités d'enseignement, les matières se compensent, les blocs peuvent aussi se compenser entre eux à la fin de l'année. Ainsi, si vous obtenez une moyenne générale sur l'année de 10/20, votre passage est assuré.

En cas d'échec lors des sessions de janvier et de mai, une seconde chance vous est offerte en juillet.

Attention, contrairement aux idées reçues, les rattrapages ne sont pas plus faciles, ils sont connus pour être notés plus sévèrement. Toutes les matières des blocs non validés où vous n'avez pas eu la moyenne sont à repasser. S'il s'agit d'une matière à TD, la note de TD est annulée (même si vous avez été défaillant), de sorte que la note obtenue en juillet compte double (8/20 revient à 16/40). Les points d'avance acquis lors de l'année (points au-dessus de la moyenne lors de la validation d'un bloc) sont valables après les rattrapages et permettent donc la compensation finale comme décrite précédemment.

À noter que le jury peut vous accorder quelques points pour l'obtention de votre année, notamment dans le cas d'un étudiant sérieux en TD... À bon entendeur !

Pour les L1, le passage en deuxième année peut aussi se faire en conditionnel, pour cela il vous faut valider les deux unités d'enseignement fondamental et une unité d'enseignement complémentaire tout en sachant que l'autre unité complémentaire sera à repasser en L2.

AVERTISSEMENT

Il est important de rappeler que les Professeurs et Maitres de conférence ne sauraient être tenus responsables d'une erreur ou d'une omission au sein des fiches de cours proposées, puisque ces dernières sont comme dit précédemment, réalisées, relues, et mises en page par des étudiants appartenant à la Corpo Paris Assas.

<u>Langage mathématique et logique</u>

1. Propositions

Proposition : phrase mathématique qui a une valeur de vérité : V (vrai) ou F (faux).

Conditions :

1. Syntaxe correcte (on peut la lire),
2. Sémantique correcte (on comprend le sens),
3. Valeur de vérité (vrai ou faux).

2. Connecteurs logiques

NON A = $(\neg A)$

Table de vérité :

A = V → $\neg A$ = F
A = F → $\neg A$ = V

A ET B (A ∧ B) : vrai seulement si A et B sont vrais.

A OU B (A ∨ B) : vrai si au moins l'un des deux est vrai.

Propriété : $\neg(A\,OUB) = (\neg A)\,ET(\neg B)$

3. Implication et équivalence

A ⇒ B : "si A alors B "/ "A implique B"
—> Faux uniquement dans le cas A vraie, B fausse.

Propriété : • $(A \Rightarrow B)$ $(\neg A)\,OUB$.
• A⇔B ↔ (A⇒B) ET (B⇒A)

4. Quantificateurs

On travaille sur un ensemble (souvent ℕ ou ℝ).

Quantificateur universel :
∀x∈E, P(x) : « Pour tout x dans E, la propriété P(x) est vraie ».

Quantificateur existentiel :
∃x∈E, P(x) : « Il existe au moins un x dans E tel que P(x) est vraie ».

Important : Pour nier une phrase, on inverse les quantificateurs (∀↔ ∃) et on nie la proposition finale.

Exemple avec une suite (a_n) :

• "Tous les termes sont nuls." :$\forall n \in N, a_n = 0$ ("Pour tout n appartenant à N, tous les termes sont égaux à 0.")
• "On tous nuls." :$\exists n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$("Il existe un n appartenant à N, tel qu'un terme est différent de 0.")

• “A partir d'un certain rang les termes sont nuls. ” : $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, a_n = 0$

Ensembles numériques et ordre sur $\mathbb{R}$

1. Chaîne des ensembles et intervalles

• $\mathbb{N}$= {0,1,2, 3, …} : entiers naturels.

• $\mathbb{Z}$= {..., −2,−1,0,1, 2, …} : entiers relatifs.

• $\mathbb{Q}$= {a/b ; a, b ∈ $\mathbb{Z}$, b ≠ 0} : nombres rationnels.

• $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels, contient $\mathbb{Q}$mais aussi les irrationnels (π, √2, e, …).
• Union, intersection et privation d'intervalles : Union ($A \cup B$), Intersection ($A \cap B$), Complémentaire ($E \setminus A$).

2. Majorant, maximum, borne supérieure

Soit ($E \subset \mathbb{R}$).

• Majorant : $M est\ un\ majorant\ deE \Leftrightarrow \forall x \in E, x \leq M.$
—> Ensemble majoré : il admet au moins un majorant.

• Minorant : $M est\ un\ minorant\ deE \Leftrightarrow \forall x \in E, M \leq x.$
—> Ensemble minoré : il admet au moins un minorant.

• Maximum : ($max(E) = M \Leftrightarrow (M est\ un\ majorant\ deE\ etM \in E)$.
• Minimum : $min(E) = M \Leftrightarrow (M est\ un\ minorant\ deE\ etM \in E)$.

• Borne supérieure (sup) : $sup(E) = le\ plus\ petit\ majorant\ deE$.
• Borne inférieure (inf) : $inf(E) = le\ plus\ grand\ minorant\ deE$.

Cas possible : sup existe mais max n'existe pas (par ex. (E=]0,1[) : sup=1 mais 1∉E), réciproquement pour inf.

Suites numériques

1. Définition

Une suite numérique est une application de N dans R.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

Définition explicite : Chaque terme u_n est définit en fonction de son rang n. Ex : $u_n = n + 1$
Définition par récurrence : Chaque terme u_{n+1} est définit à partir des précédents. Ex : $u_{n+1} = u_n + 1$

2. Bornes et monotonie

Soit (u_n) une suite réelle.

• *Suite majorée* $\Leftrightarrow \exists M, \forall n, u_n \leq M.$

• *Suite minorée* $\Leftrightarrow \exists m, \forall n, u_n \geq m.$

• *Suite bornée ⇔ majorée ET minorée.*

• Croissante : $u_{n+1} \geq u_n$

• Strictement croissante : $u_{n+1} > u_n$, de même signe strict pour strictement décroissante.

• Décroissante :$u_{n+1} \leq u_n$

• Monotone : croissante ou décroissante.

3. Limite d'une suite

On dit que la suite converge vers ℓ si les termes finissent par être très très proche de ℓ quand n tend vers l'infini.

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$

Si la suite n'a pas de limite finie → divergence (vers +∞, −∞ ou sans limite).

4. Théorèmes fondamentaux sur les suites

- Suite croissante et majorée ⇒ convergente.

—> La limite est la borne sup de l'ensemble des termes.

- Suite décroissante et minorée ⇒ convergente.

—> La limite est la borne inf.

5. Suites géométriques

$u_n = ar^n$
avec a terme initial, et r la raison.

Somme des n+1 premiers termes (n ≥ 0, r ≠ 1) :

$$S_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}(r \neq 1)$$

Comportement en +∞ :

- Si |r|<1 → (u_n → 0)
- Si r = 1, suite constante (= 1), converge vers 1.
- Si r>1 → (u_n → +∞) (si a>0)
- Si r<−1 → la suite n'a pas de limite finie.

6. Raisonnement par récurrence :

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout n :

1. Initialisation : Vérifier qu'elle est vraie au rang 0 ($P(0) vraie$.
2. Hérédité : Montrer que si $P(n)$est vraie, alors $P(n + 1)$ l'est aussi.

Fonctions, limites et continuité

1. Injections, surjection, bijection

- **Injection** : Tout élément d'arrivée a au plus un antécédent ($f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).
  Ou encore $f: A \to B est\, injective \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- **Surjection** : Tout élément d'arrivée a au moins un antécédent.
  $$f: A \to B est\, surjective \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y.$$

- **Bijection** : À la fois injective et surjective (tout élément a un unique antécédent).

$f: A \to B est\, bijective \Leftrightarrow f\, est\, injective\, ET\, surjective.$

2. Limites : règles de calcul (f et g ont une limite finie en a)

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = lim f(x) + lim g(x)$

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = (lim f(x))(lim g(x))$

- $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{lim f(x)}\, (si\, lim f(x) \neq 0)$

- $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) et de comparaison :

- T.gendarmes : Si : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $lim f(x) = lim h(x) = L$ alors : $lim g(x) = L$, quand x tend vers a.

- T.Comparaison : $Soient\, f\, et\, g\, deux\, fonctions\, définies\, sur\, un\, intervalle\, I. Telles\, que : f(x) \leq g(x)$, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \to +\infty$.

4. Continuité en un point

$f\, continue\, en\, a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a).$

On peut se dire : "On peut tracer la courbe sans lever que crayon"

Propriétés :

- Les sommes, produits, quotients (si dénominateur ≠ 0) de fonctions continues sont continues.
- Les compositions de fonctions continues sont continues.
- Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine.

5. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

$f\, continue\, sur [a, b], d\, entre\, f(a)\, et\, f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = d.$

On s'en sert notamment pour montrer qu'une équation f(x)=0 a au moins une solution sur [a,b].

6. Théorème de Weierstrass

Si f *continue sur* $[a, b] \Longrightarrow f$ *atteint un max et un min.*