Les Cartes mentales de la Corpo

Chers étudiants, ça y est, le semestre touche à sa fin. Mais pour bien profiter de l'été et éviter les rattrapages, la case des partiels semble inévitable !

Depuis maintenant 90 ans la Corpo Assas accompagne les étudiants dans tous les domaines de la vie universitaire, et pour la première fois cette année on vous propose des cartes mentales. Ces fiches sont écrites par nos membres dans le but de favoriser l'entraide étudiants ainsi que de vous aider dans l'apprentissage de certaines notions clés d'une matière.

Effectivement, ces fiches sont là pour vous orienter, elles sont faites par des étudiants et ne sont en aucun cas un substitut à ce qui a été enseigné en TD ou en cours.

Si jamais il vous venait des questions, n'hésitez pas à nous envoyer un message sur la page Facebook Corpo Assas ou à contacter *Gabrielle Manbandza* ou *Angélique Polide*.

" **Comment valider votre année ?** Pour les L1 :

Il faut tout d'abord rappeler que toutes vos notes se compensent. Pour valider de la manière la plus simple votre année, il vous faut valider votre bloc de matières fondamentales mais aussi votre bloc de matières complémentaires. Cependant, le calcul peut s'avérer plus complexe...

Chaque fin de semestre est marquée par des examens qui constituent l'épine dorsale de la validation de votre année. Bon nombre d'autres possibilités vous sont proposées pour engranger un maximum de points et limiter ainsi l'impact de vos partiels. Chacun de vos chargés de TD va vous attribuer une note sur 20 à l'issue du semestre. Vos TD de matières fondamentales comptent donc autant que l'examen écrit, lui aussi noté sur 20. Cet examen s'effectue en 3h et nécessite un exercice de rédaction. Sur un semestre, une matière fondamentale peut donc vous

rapporter jusqu'à 40 points. Seuls 20 points sont nécessaires à la validation de la matière. Pour valider votre bloc de fondamentales, il vous faut donc obtenir 40 points en additionnant vos notes de TD et vos notes aux partiels. Si toutefois vous n'obtenez pas ces 40 points, vous repasserez en juillet lors de la session de rattrapage, la ou les matières que vous n'auriez pas validée(s).
Attention : le passage par juillet annule votre note de TD obtenue dans la matière.

Pour les L2 :

Le principe est similaire, à la différence qu'il y a plus de matières fondamentales et plus de matières complémentaires.
Conclusion simple : travailler toutes les matières un minimum en mettant l'accent sur les TD et les matières fondamentales (les plus gros coefficients) vous permettra de maximiser vos chances de valider votre année du premier coup et ainsi éviter l'écueil des rattrapages de juillet.

Si, au sein même des unités d'enseignement, les matières se compensent, les blocs peuvent aussi se compenser entre eux à la fin de l'année. Ainsi, si vous obtenez une moyenne générale sur l'année de 10/20, votre passage est assuré.

En cas d'échec lors des sessions de janvier et de juin, une seconde chance vous est offerte en juillet.

Attention, contrairement aux idées reçues, les rattrapages ne sont pas plus faciles, ils sont connus pour être notés plus sévèrement. Toutes les matières des blocs non validés où vous n'avez pas eu la moyenne sont à repasser. S'il s'agit d'une matière à TD, la note de TD est annulée (même si vous avez été défaillant), de sorte que la note obtenue en juillet compte double (8/20 revient à 16/40). Les points d'avance acquis lors de l'année (points au-dessus de la moyenne lors de la validation d'un bloc) sont valables après les rattrapages et permettent donc la compensation finale comme décrite précédemment.

A noter que le jury peut vous accorder quelques points pour l'obtention de votre année, notamment dans le cas d'un étudiant sérieux en TD... A bon entendeur !

Pour les L1, le passage en deuxième année peut aussi se faire en conditionnel, pour cela il vous faut valider les deux unités d'enseignement fondamental et une unité d'enseignement complémentaire tout en sachant que l'autre unité complémentaire sera à repasser en L2.

AVERTISSEMENT

Il est important de rappeler que les Professeurs et Maitres de conférence ne sauraient être tenus responsables d'une erreur ou d'une omission au sein des fiches de cours proposées, puisque ces dernières sont comme dit précédemment, réalisées, relues, et mises en page par des étudiants appartenant à la Corpo Paris Assas.

REMERCIEMENTS

La Corpo Paris Assas souhaiterait remercier sincèrement l'intégralité des professeurs ayant permis et autorisé la diffusion de ces fiches de cours et d'avoir ainsi offert aux étudiants une aide précieuse à la réussite de leur examens.

Statistiques 3

1

4

2

3

5

Espérance et variance :

- L'espérance de X : De l'indépendance $\mathbf{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} E(Xi) = \mathbf{np}$

- La variance de X : De l'indépendance $\mathbf{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} V(Xi) = \mathbf{np(1-p)}$

Propriété : La somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes de même paramètre p est une variable aléatoire binomiale :

$$\left.\begin{array}{r} X_1 \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n_1 ; p) \\ X2 \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n_2 ; p) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendants} \end{array}\right\} X1 + X2 \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n_1 + n_2 ; p)$$

Loi Binomiale :

X suit la loi Binomiale de paramètre n et p si et seulement si X représente le nombre de succès dans n répétitions indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Autrement $X = \sum_{i=1}^{n} Xi$, où chaque Xi suis la loi de Bernoulli de paramètre p et les Xi sont indépendantes.
On note $X \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n ; p)$.
Soit k ∈ {0, …, n}

- Dans la liste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de réalisation des X_i, la probabilité d'avoir k succès est, par l'indépendance des X_i :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

- Il y a C_n^k façons de choisir k valeurs $X_i = 1$. Donc,

$$P(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \forall k = 0, \ldots, n$$

Loi de Bernoulli de paramètre p :

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend deux valeurs possibles 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité 1 – p. La valeur 0 symbolise l'échec et 1 me succès.

L'espérance de X : E(X) = (1 – p) x 0 + p x 1 = p
E(X) = p

La variance de X : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1-p)$

Loi normale (ou de Laplace-Gauss) :

Une loi très importante, utilisée par exemple : variation du diamètre d'une pièce dans une fabrication, répartition des erreurs de mesure autours de la vraie valeur, … Le théorème central limite lui donne un rôle capital : la moyenne de variables aléatoires indépendantes et de même loi suit asymptotiquement une loi normale. D'où son utilité en échantillonnage.

X suit une loi normale, on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

On admet que f est une densité donc,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

Ou

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

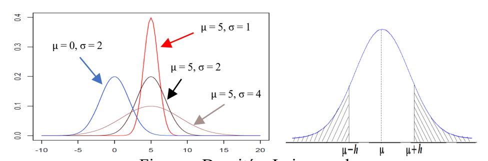

Figure – Densité – Loi normale

Propriétés :
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu ; \sigma)$, la courbe de sa densité est symétrique par rapport à la droite verticale x = μ, d'où

- $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$
- $P(X \leq \mu - h) = P(X \geq \mu + h)$

Valeurs particulières :
$P(\mu - 1{,}64\,\sigma < X < \mu + 1{,}64\,\sigma) = 0{,}90$
$P(\mu - 1{,}96\,\sigma < X < \mu + 1{,}96\,\sigma) = 0{,}95$
$P(\mu - 3{,}09\,\sigma < X < \mu + 3{,}09\,\sigma) = 0{,}99$

Espérance : E(X) = μ

Variance : $V(X) = \sigma^2$

Propriétés :

- La loi normale admet des moments de tout ordre
- Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu1 ; \sigma1)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu2 ; \sigma2)$ et X et Y sont indépendantes alors, $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu1 + \mu2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Loi hypergéométrique :

Considérons une population de N individus, dont une proportion p, donc $N_0 = pN$ individus, possèdent un caractère donné, disant C. On prélève n individus (sans remise ou d'un coup). La variable aléatoire X qui compte le nombre d'individus ayant le caractère C suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n, p, on note $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N; n; p)$.

Pour k = 0, …, n

- Choisir k individus ayant le caractère C parmi les n revient à choisir
- k individus parmi les N_0 possédant C. Le nombre de possibilités est C_{N0}^k
- n – k individus parmi les N – N_0 individus ne possédant pas C. Le nombre de possibilités est C_{N-N0}^{k-n}
- Donc,

$$P(X = k) = \frac{C_{N0}^k\, C_{N-N0}^{n-k}}{C_N^n}$$

- Espérance : E(X) = np

- Variance : $V(X) = \frac{N-n}{N-1}\, np\,(1-p)$

Tribu

Soit $\mathcal{C}_0$ une collection d'ensembles de Ω. La plus petite tribu $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{C}_0$ est appelée tribu engendrée par $\mathcal{C}_0$. On note $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}_0)$. $\sigma(\mathcal{C}_0)$ est l'intersection des tribus sur Ω contenant $\mathcal{C}_0$.

→ Tribu discrète : La collection de tous les événements imaginables P(Ω) de Ω est une σ – algèbre. Utilisée souvent si Ω est finie.

→ Tribu grossière est C = {Ω, ∅}.

Espaces probabilisés :

Une collection d'événements $\mathcal{C}$ de l'univers Ω est dite algèbre (tribu) si et seulement si :

1) $A \in \mathcal{C}, \bar{A} \in \mathcal{C}$,
2) $\mathcal{C}$ est stable par « union dénombrable » : pour tout famille dénombrable d'événements Ai, i ∈ ℕ, de $\mathcal{C}$, on a $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Ai \in \mathcal{C}$
3) $\Omega \in \mathcal{C}$

En remplaçant le mot « dénombrable » par « fini », on obtient la définition d'un algèbre.

Modéliser la chance :

→ On appelle espace probabilisable un couple $(\Omega ; \mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une algèbre d'événements de l'univers Ω.
→ Une (loi de) probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{C})$ est une application P de $\mathcal{C}$ à images dans [0; 1] vérifiant :

1) P(Ω) = 1
2) Pour toute collection dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles, Ai, i ∈ ℕ, on a : $P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Ai\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(Ai)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est appelé **espace probabilisé.**

Probabilité Conditionnelles :

Soit B un événement avec P(B) ≠ 0. On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant (ou si) B, la quantité :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule des **probabilités totales** : Soient Bi, i ∈ ℕ, un système complet d'événements, alors,

$$P(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A|Bj)P(Bj)$$

Formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

La formule de Bayes s'applique pour calculer des probabilités d'événements ayant causé d'autres (**probabilité de cause**).

Variable aléatoire :

Une variable aléatoire (v.a.) réelle est une application X de $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ qui est mesurable, i.e., vérifiant :
$$X^{-1}(B) \in \mathcal{C}, \forall B \in \mathfrak{B}$$

Une variable aléatoire X est dite :
- **discrète** si elle prend au plus un nombre dénombrable de valeurs (ou si ses valeurs sont isolées et peuvent entre numérotées).
- **continue** si elle prend n'importe quelle valeur dans un intervalle de ℝ ou dans ℝ entièrement.

Espérance :

- L'espérance d'une variable aléatoire X discrète est donnée par : $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$

C'est la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités.

- L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f, est donnée par : $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$

Loi normale centrée réduite :

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0 ; 1)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

- C'est donc un cas particulier de la loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma)$ générale.

- La densité de $\mathcal{N}(0, 1)$ est centrée en 0, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0 ; 1) \Longrightarrow E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu ; \sigma) \Longrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0 ; 1)$$

Variance :

La variance d'une variable aléatoire V(X) ou σ_X^2 est définie par :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

Cas discret : $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$

Cas continue, X de densité f :

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$$

V(X) mesure la dispersion de X autour de son espérance E(X).

V(X) est la valeur minimale de $E([X - a]^2)$ quand a varie dans ℝ. Pour $a = 0$, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

La covariance de X et Y est définie par :

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$