

Statistiques 2 - Examen

Durée : 1h30 - Documents interdits, calculatrices autorisées
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte dans la notation.

Cours

- (1 point) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et P une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$.
À quelle(s) condition(s) P est-elle une mesure de probabilité ?
- (1 point) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, A^c, B \in \mathcal{A}$ des événements non-négligeables.
Exprimer $P(A|B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B|A)$ et $P(B|A^c)$.
- (1 point) Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
Quelle(s) condition(s) F doit-elle satisfaire pour correspondre à une fonction de répartition ?
- (1 point) À partir de la définition de la variance, montrer que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- (1 point) Soit $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{4})$. Déterminer $P(X = 3)$.

Exercice 1 (Probabilités conditionnelles et indépendance)

M. John a deux enfants : Camille et Dominique dont on ne connaît pas le sexe. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de probabilité représentant l'ensemble des situations possibles et $C, D \in \mathcal{A}$ les événements définis ci-dessous.

C : "Camille est une fille." D : "Dominique est une fille."

On suppose que C et D sont indépendants et vérifient $P(C) = P(D) = \frac{1}{2}$.

- (3 points) Exprimer les événements E, F, G suivants à l'aide de C et D puis déterminer leur probabilité.
 E : "M. John a deux filles." F : "M. John a au moins une fille." G : "M. John a exactement une fille."
- (1 point) Les événements C, D, G sont-ils mutuellement indépendants ?
- (1 point) Quelle est la probabilité que M. John ait deux filles sachant qu'au moins un des enfants est une fille ? Sachant que Camille est une fille ?

Exercice 2 (Variables aléatoires discrètes)

On considère un jeu de hasard dans lequel un joueur lance à trois reprises un dé équilibré à six faces et remporte 10 € s'il obtient une suite strictement croissante de numéros, 5 € s'il obtient au moins deux fois un même numéro et rien sinon.

- (3 points) Soit X la variable aléatoire représentant les gains du joueur, montrer les égalités suivantes.

$$P(X = 0) = \frac{25}{54} \quad P(X = 5) = \frac{24}{54} \quad P(X = 10) = \frac{5}{54}$$

- (1 point) Représenter graphiquement F_X .
- (1 point) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 (Variables aléatoires continues)

Soit P_X la loi d'une variable aléatoire réelle absolument continue de densité $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{6x^2}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{12-6x}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

- (3 points) Déterminer l'expression de F_X et en déduire la valeur de $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$.
- (1 point) Soit $Y = e^X$. Exprimer F_Y en fonction de F_X et en déduire la densité de P_Y .
- (1 point) Calculer $E(Y)$.