Economie de l'incertain et de l'information L3 (4304)

Durée de l'épreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

Exercice 1 - Choix de portefeuille

Considérons un individu ayant le choix entre un actif certain dont le taux de rendement est connu égal à $i > 0$ et un actif risqué dont le taux de rendement R est aléatoire. La variable aléatoire R prend la valeur $r > 0$ avec une probabilité ρ et la valeur 0 avec une probabilité $1-\rho$. Cet individu a une richesse initiale w qu'il partage entre les deux actifs tel que $a + m = w$ avec a l'investissement en actif risqué et m l'investissement en actif certain. La fonction d'utilité élémentaire de cet individu $u(x)$ est supposée croissante et concave.

1) Écrire la richesse aléatoire de cet individu (que nous noterons W) sous la forme d'une loterie dont les conséquences sont fonction de a (vous éliminerez donc la variable m).

2) En utilisant la définition de la prime de risque, montrez qu'il est équivalent pour cet individu de maximiser son espérance d'utilité et de maximiser la différence entre l'espérance de sa richesse aléatoire ($\mathbb{E}(W)$) et la prime de risque qu'il associe à cette richesse aléatoire (Π).

Dans la suite de cet exercice nous considérerons que la fonction d'utilité élémentaire de cet individu est de type exponentielle négative:

$$u(x) = \exp(-\beta x) \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0$$

Nous supposons également que $\rho r > i$.

3) Montrez que:

$$\mathbb{E}(W) = i(w-a) + \rho r a$$
$$\mathbb{V}(W) = \rho(1-\rho)(ra)^2$$

4) A partir des résultats énoncés dans les questions 2) et 3), écrivez la condition du premier ordre du problème de choix de portefeuille de l'individu en supposant qu'il existe une solution intérieure à ce problème. Donnez l'expression de a^* la somme que cet individu choisira de placer en actif risqué.

5) Représentez sur un même graphique l'espérance de gain marginale $\left(E_m = \frac{\partial \mathbf{E}(W)}{\partial a}\right)$ et la prime de risque marginale $\left(\Pi_m = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)$ en fonction de a. Vous ferez également apparaître a^* sur ce graphique. [*Une attention particulière sera portée à la précision de vos représentations graphiques.*]

6) Représentez graphiquement l'effet d'une augmentation de i sur a^*. Discutez le résultat obtenu.

7) Représentez graphiquement l'effet d'une augmentation de r sur a^*. Discutez le résultat obtenu.

Exercice 2 - Assurance en présence d'aléa moral

Considérons le problème d'assurance avec aléa moral suivant: un agent veut assurer sa propriété contre un risque d'incendie. La probabilité qu'un incendie ait lieu dépend de l'effort de prévention de l'agent $e \in \{e_H, e_L\}$ avec $e_H > e_L$. On suppose que la **probabilité qu'il n'y ait pas d'incendie** si l'agent fait l'effort e_H est égale à $p(e_H) = 3/5$ alors que cette probabilité lorsque l'agent fait l'effort e_L est égale à $p(e_L) = 2/5$. Les coûts associés à chaque niveau d'effort sont: $c(e_H) = 1$ et $c(e_L) = 0$.

L'agent dispose d'une richesse initiale égale à 100. On suppose que le dégât provoqué par l'incendie se traduit par la perte de la totalité de cette richesse. L'utilité de l'agent est donnée par la fonction suivante:

$$u_a(w, e) = \sqrt{w} - c(e)$$

avec w sa richesse.

Le contrat d'assurance spécifie une prime d'assurance d'un montant $\beta \geq 0$ et un remboursement net (qui correspond au montant du remboursement moins la prime d'assurance) $\alpha \geq 0$ versé en cas d'incendie. Ainsi la richesse de l'agent qui contracte une telle assurance sera $w = 100 - \beta$ si il n'y a pas d'incendie et $w = \alpha$ si il y a un incendie. L'assureur (le principal) est neutre au risque, son utilité est égale à ses profits. L'utilité de l'assureur est donc $-\alpha$ si il y a un incendie et β si il n'y a pas d'incendie.

1) Montrez que l'utilité de réservation de l'agent (qui correspond à son utilité maximale dans le cas où il ne contracte pas d'assurance) est $\bar{u} = 5$.

2) Ecrire, en fonction de α et β, l'espérance d'utilité d'un agent qui décide de prendre une assurance et choisit l'effort e_H.

3) Ecrire, en fonction de α et β, l'espérance d'utilité de l'assureur (principal) lorsque l'agent décide de prendre l'assurance et choisit l'effort e_H.

4) Considérons d'abord le cas où l'effort est observable et supposons que le principal souhaite que l'agent choisisse e_H. Posez le problème d'optimisation du principal dans ce cas (le principal choisit α et β de manière à maximiser son espérance d'utilité tout en s'assurant que l'agent accepte le contrat).

5) Résolvez ce programme et montrez, qu'à l'optimum, le principal choisira de fixer $\alpha = 100 - \beta$. Interprétez cette condition.

6) Déterminez les valeurs précises de α et de β proposées par le principal dans ce cas.

7) Plaçons nous maintenant dans le cas d'effort inobservable. Écrire le programme de maximisation de l'assureur si celui-ci veut inciter l'agent à choisir e_H.

8) Nous avons vu en cours que, dans ce cas, le principal offre un contrat tel que les contraintes de participation et d'incitation sont saturées [*On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat*]. Déduisez les valeurs optimales de α et β.

9) Comparez le profit de l'assureur dans la situation où il impose e_H et où l'effort est observable et dans celle où il incite l'agent à choisir e_H et où l'effort est inobservable. Commentez.