Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II)

Droit - Economie - Sciences Sociales

U.E.F.2

5289

Assas

Session : Septembre 2016

Année d'étude : Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion

Discipline : *Statistiques 4*

(Unité d'Enseignements Fondamentaux 2)

Titulaire(s) du cours :

Mme Céline CHEVALIER

Document(s) autorisé(s) : Aucun

Université Paris II
L2 Sciences Économiques et Gestion

Statistiques 4 (5289)
Cours de M$^{\text{me}}$ Chevalier

Septembre 2016

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer. Le sujet est noté sur 12.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais commencez si possible chaque exercice en haut d'une nouvelle page de votre copie et pensez à numéroter les pages.

Exercice 1 (4 points)

On considère que le temps d'attente en minutes aux caisses d'un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ où θ est un réel inconnu strictement positif. Rappelons que sa densité est égale à

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta \times \mathrm{e}^{-x/\theta} & \text{si } x \in [\,0\,;+\infty\,[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le temps d'attente de n clients choisis au hasard fournit donc un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable aléatoire X.

1. Montrer que $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$ est un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Donner un deuxième estimateur T'_n de θ obtenu par la méthode des moments.
3. Montrer que l'estimateur de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n.
4. Montrer que l'information de Fisher est égale à $\mathrm{I}_n(\theta) = n/\theta^2$.
5. Donner la définition d'un estimateur sans biais et d'un estimateur convergent. L'estimateur T_n vérifie-t-il ces propriétés ?
6. Est-il efficace ?

Exercice 2 (2,5 points)

1. On considère la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. indépendantes et de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}x + \dfrac{n-2}{2n} & \text{si } x \in [\,0\,;2\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer la convergence en loi de la suite (X_n) vers une variable X dont on précisera la loi.

2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 10. On considère la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. définie par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i}{2n} + 7$$

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer Z_n en fonction de $\overline{\mathrm{Y}}_n$.
   (b) Montrer que la suite $(\overline{\mathrm{Y}}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers un réel y que l'on précisera.
   (c) En déduire la convergence en probabilité, puis en loi, de la suite (Z_n) vers la v.a. constante en 12. On citera précisément les théorèmes utilisés.

3. En déduire la convergence de la suite $(\mathrm{X}_n + \mathrm{Z}_n)$ vers la variable $\mathrm{T} = \mathrm{X} + 12$.

Exercice 3 (2,5 points)

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi est définie par la densité

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Calculer la densité marginale de la variable aléatoire X. On admet que $f_{\mathrm{Y}}(y) = y/2$ si $y \in [0\,;2]$ (et 0 sinon).

   (b) Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

   (c) Déterminer la fonction de répartition marginale de X.

2. (a) Montrer que la fonction de répartition du couple (X, Y) est égale à

$$\mathrm{F}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } y \leqslant 0 \\ x^2y^2/4 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant 2 \\ y^2/4 & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 2 \end{cases}$$

   (b) En déduire comment retrouver d'une autre façon la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Vérifier que l'on obtient bien le même résultat qu'à la question 1c.

   (c) Déduire de la question 2b la densité marginale de la variable aléatoire X. Vérifier que l'on obtient bien le même résultat qu'à la question 1a.

Exercice 4 (3 points)

Un réparateur de téléphones mobiles utilise un appareil bon marché afin de détecter les batteries usagées et il souhaite savoir la proportion p de batteries défaillantes que l'appareil arrive à identifier correctement. Pour cela, il utilise un lot de 100 batteries hors d'usage et les fait tester à l'appareil, qui en considère seulement 80 comme usagées.

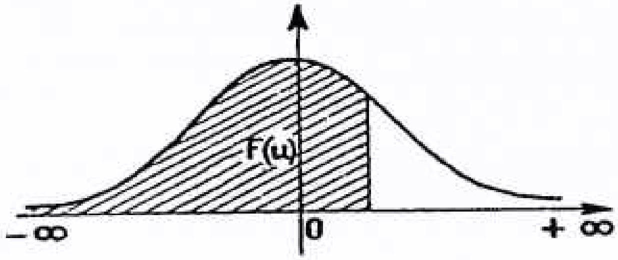
1. Donner une estimation du paramètre p en précisant les propriétés de l'estimateur utilisé.
2. Construire un intervalle de confiance unilatéral au niveau de confiance $1-\alpha = 0,975$ pour le paramètre p à l'aide d'un abaque.

   (Rappel : un abaque donnant l'intervalle bilatéral au niveau de confiance $1-\alpha = 0,95$ donne aussi les intervalles unilatéraux au niveau de confiance $1-\alpha/2 = 0,975$.)
3. On suppose désormais qu'on ne dispose pas de cet abaque.

   (a) Montrer que l'on peut approcher la variable aléatoire $\widehat{p}_n$ par une loi normale dont on précisera les paramètres.

   (b) Construire alors un nouvel intervalle de confiance pour p. (On n'effectuera pas les calculs jusqu'au bout.)

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

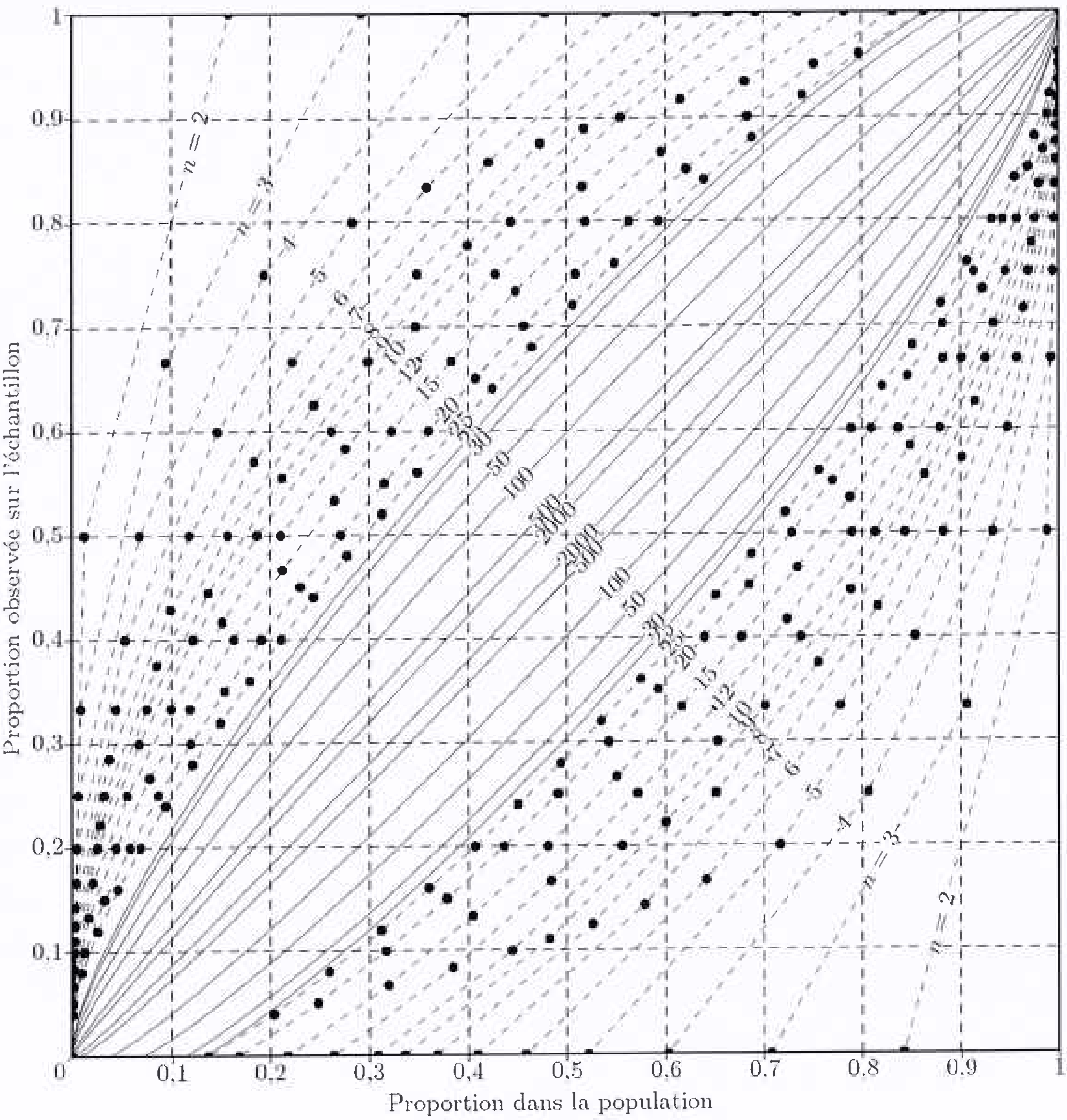
Exemple	pour u = 1,37	F(u) = 0,9147
pour u = -1,37	F(u) = 0,0853

TABLE 9.

Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

ABAQUE, intervalle bilatéral, $\alpha = 0{,}05$

L'abaque suivant a été construit pour un niveau de confiance $1 - \alpha = 0.95$. Pour une taille d'échantillon $n \leqslant 25$, elle donne l'intervalle de confiance « exact » (méthode de Clopper-Pearson) pour la proportion, et, pour $n > 25$, un intervalle de confiance asymptotique — moins lourd à calculer — déterminé à l'aide d'une approximation normale.



En ordonnée, on place la proportion observée p et on obtient les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance approximatif comme les abscisses des points d'intersection de la droite horizontale $y = p$ avec les deux courbes correspondant à la taille n de l'échantillon.