

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit E et F des espaces vectoriels tels que $\dim E = n$, $\dim F = m \geq n$.

Soit $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E .

Soit ϕ une application linéaire de E dans F .

- a) Définir $\text{Ker} \phi$.
- b) Montrer que $\text{Ker} \phi$ est un sous-espace vectoriel de E .
- c) Donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que ϕ soit injective.
- d) Soit ϕ injective. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit surjective.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(\vec{u}) = f(x, y, z) = (-x + z, 2x - 2z, x - z).$$

- a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer $\text{Ker} f$. En donner une base et la dimension.
- c) Quelle est la dimension de $f(\mathbb{R}^3)$?
- d) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$.
- e) f est-elle injective, surjective, bijective?
- f) Calculer la matrice A représentant f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & 3a \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Pour quelles valeurs de a , la matrice A est inversible?
- b) Calculer sa matrice inverse dans ces cas.
- c) Soit $a = 3$, résoudre $AX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- d) Soit m dans $\mathbb{R}$ et $\vec{u}_1 = (1, 3, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, -1, -3)$, $\vec{u}_3 = (m, 3m, 1)$
Pour quelles valeurs de m , le système est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4

- a) On rappelle que $\mathcal{M}(3, 2)$ est l'espace vectoriel des matrices $(3, 2)$. Quelle est sa dimension?
- b) Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, 2)$:

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, 2) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- c) Donner une base de $\mathcal{A}$.
- d) Quelle est la dimension de $\mathcal{A}$?