Les Cartes mentales de la Corpo

Chers étudiants, ça y est, le semestre touche à sa fin. Mais pour bien profiter de l'été et éviter les rattrapages, la case des partiels semble inévitable !

Depuis maintenant 90 ans la Corpo Assas accompagne les étudiants dans tous les domaines de la vie universitaire, et pour cette année on vous propose des cartes mentales. Ces fiches sont écrites par nos membres dans le but de favoriser l'entraide étudiante ainsi que de vous aider dans l'apprentissage de certaines notions clés d'une matière.

Effectivement, ces fiches sont là pour vous orienter, elles sont faites par des étudiants et ne sont en aucun cas un substitut à ce qui a été enseigné en TD ou en cours.

Si jamais il vous venait des questions, n'hésitez pas à nous envoyer un message sur la page Facebook Corpo Assas ou à contacter *Angèle Thiollier* ou *Lina Cherkaoui*.

Comment valider votre année ?

Pour les L1 :
Il faut tout d'abord rappeler que toutes vos notes se compensent. Pour valider de la manière la plus simple votre année, il vous faut valider votre bloc de matières fondamentales mais aussi votre bloc de matières complémentaires. Cependant, le calcul peut s'avérer plus complexe...

Chaque fin de semestre est marquée par des examens qui constituent l'épine dorsale de la validation de votre année. Bon nombre d'autres possibilités vous sont proposées pour engranger un maximum de points et limiter ainsi l'impact de vos partiels. Chacun de vos chargés de TD va vous attribuer une note sur 20 à l'issue du semestre. Vos TD de matières fondamentales comptent donc autant que l'examen écrit, lui aussi noté sur 20. Cet examen s'effectue en 3h et nécessite un exercice de rédaction. Sur un semestre, une matière fondamentale peut donc vous rapporter jusqu'à 40 points. Seuls 20 points sont nécessaires à la validation de la matière. Pour valider votre bloc de fondamentales, il vous faut donc obtenir 40 points en additionnant vos notes de TD et vos notes aux partiels. Si toutefois vous n'obtenez pas ces 40 points, vous repasserez en juillet, lors de la session de rattrapage, la ou les matières que vous n'auriez pas validée(s).

Attention : le passage par juillet annule votre note de TD obtenue dans la matière.

Pour les L2 :

Le principe est similaire, à la différence qu'il y a plus de matières fondamentales et plus de matières complémentaires.

Conclusion simple : travailler toutes les matières un minimum en mettant l'accent sur les TD et les matières fondamentales (les plus gros coefficients) vous permettra de maximiser vos chances de valider votre année du premier coup et ainsi éviter l'écueil des rattrapages de juillet.

Si, au sein même des unités d'enseignement, les matières se compensent, les blocs peuvent aussi se compenser entre eux à la fin de l'année. Ainsi, si vous obtenez une moyenne générale sur l'année de 10/20, votre passage est assuré.

En cas d'échec lors des sessions de janvier et de mai, une seconde chance vous est offerte en juillet.

Attention, contrairement aux idées reçues, les rattrapages ne sont pas plus faciles, ils sont connus pour être notés plus sévèrement. Toutes les matières des blocs non validés où vous n'avez pas eu la moyenne sont à repasser. S'il s'agit d'une matière à TD, la note de TD est annulée (même si vous avez été défaillant), de sorte que la note obtenue en juillet compte double (8/20 revient à 16/40). Les points d'avance acquis lors de l'année (points au-dessus de la moyenne lors de la validation d'un bloc)

sont valables après les rattrapages et permettent donc la compensation finale comme décrite précédemment.
À noter que le jury peut vous accorder quelques points pour l'obtention de votre année, notamment dans le cas d'un étudiant sérieux en TD... À bon entendeur !

Pour les L1, le passage en deuxième année peut aussi se faire en conditionnel, pour cela il vous faut valider les deux unités d'enseignement fondamental et une unité d'enseignement complémentaire tout en sachant que l'autre unité complémentaire sera à repasser en L2.

AVERTISSEMENT

Il est important de rappeler que les Professeurs et Maitres de conférence ne sauraient être tenus responsables d'une erreur ou d'une omission au sein des fiches de cours proposées, puisque ces dernières sont comme dit précédemment, réalisées, relues, et mises en page par des étudiants appartenant à la Corpo Paris Assas.

REMERCIEMENTS

La Corpo Paris Assas souhaiterait remercier sincèrement l'intégralité des professeurs ayant permis et autorisé la diffusion de ces fiches de cours et d'avoir ainsi offert aux étudiants une aide précieuse à la réussite de leurs examens.

Terminologie et concepts de base

1

La **statistique** est la science qui collecte, organise, résume et interprète des données.

Descriptive : résume l'information contenue dans les données de manière synthétique et efficace.

Mathématique : permet de prendre des décisions et de faire des prévisions sur une population à partir des résultats obtenus sur un échantillon.

2

VOCABULAIRE

Population : ensemble des éléments étudiés.

Individus : éléments de la population.

Échantillon : sous-partie de la population.

Variable/caractère : ce qui décrit/classe la population
Variable **qualitative** : ne se présente pas sous forme numérique
Variable **quantitative** : variable numérique et mesurable exprimant une quantité.

- Discrète : représentée par un nombre fini de valeurs
- Continue : peut prendre un nombre infini de valeurs

Modalités : valeurs que peut prendre la variable

3

CLASSES

- Les variables continues peuvent être regroupées par **classes**.
- **centre** : (extrémité inférieure+extrémité supérieure)/2
- **amplitude** : extrémité supérieure - extrémité inférieure

4

OPERATEUR SOMME

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

- $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
- $\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i,\ a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=1}^{n} a = n.a$
- $\sum_{i=1}^{n}(x_i + a) = \sum_{i=1}^{n} x_i + n.a,\ a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n.a^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i$

5

OPERATEUR PRODUIT

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$$

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$
- $\prod_{i=1}^{n} a.x_i = a^n \prod_{i=1}^{n} x_i$
- $\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{i=1}^{n} y_i$
- $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)$
- $\prod_{i=1}^{n} \exp(x_i) = \exp(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

6

LES TAUX DE CROISSANCE

- Un taux de croissance mesure la variation d'une grandeur entre deux dates : t = Vf/Vi −1 = Vf−Vi/Vi
- coefficient multiplicateur (CM) : Vf/Vi

Vf =Vi(1+*t*) ; CM=1+t

$t > 0$ (ou $CM > 1$) : hausse (inverse=baisse)

- TC global : T =(1+t1)(1+t2)...(1+tn)−1
- TC moyen (c'est le taux qui, appliqué régulièrement sur plusieurs périodes, conduit au même résultat que l'ensemble des taux successifs) :

$$\overline{T} = \sqrt[n]{1+T} - 1 = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Distributions statistiques à une variable (1)

1. Principes de base

L'un des objectifs de la statistique descriptive est de résumer les données "brutes" recueillies sur une population dans des tableaux statistiques.

Tableau statistique type

x_i	x_1	...	x_k
(centre c_i)	c_1	...	c_k
(amplitude a_i)	a_1	...	a_k
effectif ni	n_1	...	n_k
f_i	f_1	...	f_k
F_i	F_1	...	F_k
F'_i	F'_1	...	F'_k
m_i = ni*ci	m_1	...	m_k
$q_i = m_i/\sum m_i$	q_1	...	q_k
$Q_i = \sum q_i$	Q_1	...	Q_k

Fréquences

C'est la proportion d'individus de la population présentant la modalité xi.

fi = ni/n

Pour des classes d'amplitudes inégales :
fréquence corrigée = fi/ai

$0 \leq f_i \leq 1, \ \forall\, 1 \leq i \leq k$

$f_i\ \% = f_i \times 100$

Fréquence cumulée (proportion d'individus ayant des modalités du caractère étudié inférieures ou égales à xi) :

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = \frac{N_i}{n}, (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Fréquence cumulée décroissante (proportion d'individus ayant des modalités du caractère étudié supérieures ou égales à xi) :

$$F_i^d = \sum_{j=i}^{k} f_j, (i = 1, 2, \ldots, k)$$

2. Représentation graphique

- Caractère qualitatif
  - Diagramme en bâton
  - Diagramme en barres
  - Diagramme circulaire
- Caractère quantitatif, variable discrète
  - Polygone de fréquence
  - Courbe cumulative
- Caractère quantitatif, variable continu
  - Courbe cumulative
  - Histogrammes

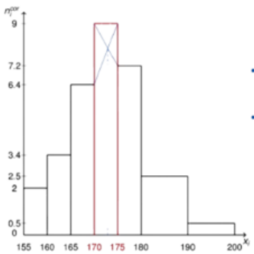
3. Caractéristiques de tendance centrale

Mode/classe modale

Valeur/classe la plus fréquente : fréquence/fréquence corrigée la plus élevée.

Déterminer le mode dans une distribution continue

x_i	[155,160[	[160,165[	[165,170[	[170,175[	[175,180[	[180,190[	[190,200[
n_i	10	17	32	45	36	25	5
a_i	5	5	5	5	5	10	10
n_i^{cor}	2	3,4	6,4	9	7,2	2,5	0,5



- La classe modale est : [170, 175[
- $M_o = 170 + \frac{9-6,4}{(9-6,4)+(9-7,2)} \times 5 \simeq 173$

Moyennes

Harmonique

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}$$ Variable discrète

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{c_i}$$ Variable continue

Géométrique

$$m_g = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$ Variable discrète

$$m_g = \left(\prod_{i=1}^{k} c_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$ Variable continue

Arithmétique

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$ Variable discrète

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i c_i$$ Variable continue

quantiles

On appelle quantiles d'ordre α les (α − 1) valeurs qui divisent les observations en α parties d'effectifs égaux.

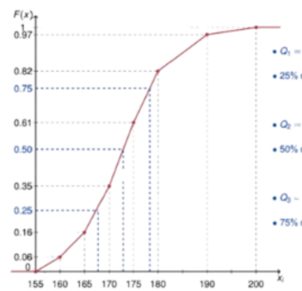
Les trois quartiles sont les quantiles d'ordre 4 (Q1, Q2, Q3).

Médiane : deuxième quartile (Q2)

Valeur qui partage la série statistique en deux groupes de même effectif.

Déterminer les quartiles dans une distribution continue :

x_i	[155,160[	[160,165[	[165,170[	[170,175[	[175,180[	[180,190[	[190,200[
F_i	0,06	0,16	0,35	0,61	0,82	0,97	1



- $Q_1 = 165 + \frac{0,25-0,16}{0,35-0,16} \times 5 \simeq 167,4$ cm
- 25% des étudiants mesurent moins de 167,4 cm.
- $Q_2 = 170 + \frac{0,5-0,35}{0,61-0,35} \times 5 \simeq 172,9$ cm
- 50% des étudiants mesurent moins de 172,9 cm.
- $Q_3 = 175 + \frac{0,75-0,61}{0,82-0,61} \times 5 \simeq 178,3$ cm
- 75% des étudiants mesurent moins de 178,3 cm.

Distributions statistiques à une variable (2)

1 Caractéristiques de dispersion

Étendue : écart entre la plus petite et la plus grande valeur de la série

Écart interquartile : Q3-Q1
Plus il est large, plus la série est dispersée.

Variance : $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$

$V(X) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

Écart-type : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Mesure la dispersion des valeurs d'un échantillon statistique autour de la moyenne arithmétique de l'échantillon.

2 Caractéristiques de forme

Moments d'une distribution

Moment centré d'ordre r ∈ N

$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^r$

m1=x
µ1=0
µ2=V(x)

Moment simple d'ordre r ∈ N

$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r$

Comparaison des indicateurs de tendance centrale

moyenne = Médiane = Mode : La distribution est symétrique.
moyenne > Me > Mo : La distribution est étalée vers la droite.
moyenne < Me < Mo : La distribution est étalée vers la gauche.

Coefficients d'asymétrie et d'applatissement

Coefficient d'asymétrie de Yule

$$C_Y = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}$$

$CY = 0$: la distribution est symétrique.
$CY > 0$: la distribution est étalée vers la droite.
$CY < 0$: la distribution est étalée vers la gauche.

Coefficient d'asymétrie de Fisher

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_X^3}\right)^3$$

$\gamma 1 = 0$: la distribution est symétrique autour de la moyenne.
$\gamma 1 > 0$: la distribution est étalée vers la droite.
$\gamma 1 < 0$: la distribution est étalée vers la gauche.

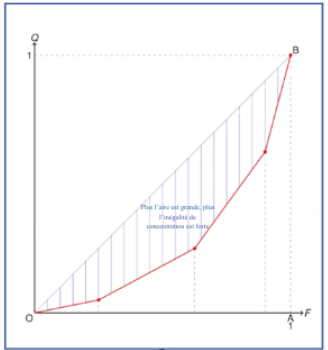
Coefficient d'aplatissement de Fisher

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

γ2 = 0 : la distribution possède un aplatissement du même ordre que la loi normale.
γ2 > 0 : la distribution est plus aplatie que la loi normale.
γ2 < 0 : la distribution est moins aplatie que la loi normale.

3 Caractéristiques de concentration

Caractéristiques de concentration : mesure du degré d'inégalité dans la répartition d'une caractéristique au sein d'une population.



Courbe de concentration de Lorenz :
elle s'obtient en plaçant les points de coordonnées (Fi , Qi) et en les joignant par des segments de droite.
L'aire de concentration est la région comprise entre la diagonale et la courbe.

Indice de Gini

$I_G = 2 \times \text{aire de concentration}$

Calcul :

$$I_G = 1 - \sum_{i=1}^{K}(F_i - F_{i-1})(Q_i + Q_{i-1})$$
$$= 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i(Q_i + Q_{i-1})$$

Masse d'une classe mi = ni*ci

Masse totale $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$

Masse relative d'une classe $q_i = \frac{m_i}{m}$

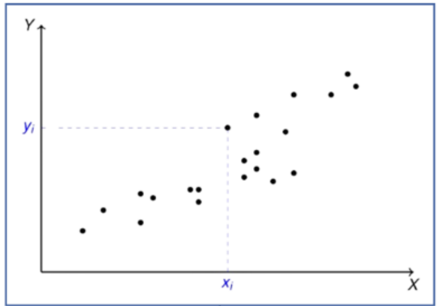
Médiale : médiane de la distribution des masses ni xi

La différence entre la médiale et la médiane est un indicateur de concentration : plus elle est grande, plus l'inégalité dans la répartition est importante.

Distributions statistiques à deux variables

1

Représentation graphique : nuage de points



2

Tableau de contingence

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1j}	$\dots$	n_{1q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	$\dots$	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{iq}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	n_{p2}	$\dots$	n_{pj}	$\dots$	n_{pq}

La quantité nij à l'intersection de la ligne xi et de la colonne yj est le nombre d'individus pour lesquels X = xi et Y = yj .

3

Complément sur l'opérateur somme

- $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} x_i y_j$
- $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} x_i y_j\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{j=1}^{q} y_j$
- $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{j=1}^{q} n_{ij} y_j$

4

Distributions marginales

Les p $(x_i, n_{i.})$ forment la distribution marginale de la variable X.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_p
Effectifs	$n_{1.}$	$n_{2.}$	$\dots$	$n_{i.}$	$\dots$	$n_{p.}$

Les q $(y_j, n_{.j})$ forment la distribution marginale de la variable Y.

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q
Effectifs	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\dots$	$n_{.j}$	$\dots$	$n_{.q}$

Effectifs marginaux

$n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij} \quad n_{.j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij} \quad \sum_{i=1}^{p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j} = n$

Fréquences marginales

$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad f_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} = \sum_{j=1}^{q} f_{ij}, \quad f_{.j} = \frac{n_{.j}}{n} = \sum_{i=1}^{p} f_{ij}$

Moyennes marginales

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j$

Variances marginales

$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i.}(x_i - \overline{x})^2$

$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{.j}(y_j - \overline{y})^2$

5

Distributions marginales

Distribution conditionnelle de X pour $Y = y_j$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_p	Total
Effectifs	n_{1j}	n_{2j}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{pj}	$n_{.j}$

Distribution conditionnelle de Y pour $X = x_i$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q	Total
Effectifs	n_{i1}	n_{i2}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{iq}	$n_{i.}$

Fréquences conditionnelles

$f_{i|j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} \qquad f_{i|j} = \frac{n_{ij}}{n_{.i}}$

$f_{ij} = f_{j|i} \times f_{i.} = f_{i|j} \times f_{.j}$

Moyennes conditionnelles

$\overline{y}_i = \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{q} f_{j|i} x_j$

$\overline{x}_j = \frac{1}{n_{.j}}\sum_{i=1}^{p} n_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{p} f_{i|j} x_i$

Variances conditionnelles

$V_j(x) = \frac{1}{n_{.j}}\sum_{i=1}^{p} n_{ij}(x_i - \overline{x}_j)^2$

$V_i(y) = \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(y_j - \overline{y}_i)^2$

6

Les variables X et Y sont (statistiquement) indépendantes si, pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,q\}$:

- $f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j} \Leftrightarrow n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \Leftrightarrow f_{i|j} = f_{i.}$ (ou $f_{j|i} = f_{.j}$)

7

Covariance

Données brutes

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Données groupées

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

$Cov(X,X) = V(X)$

$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$Cov(aX,Y) = a\,Cov(X,Y), a \in \mathbb{R}$

$Cov(X,Y) = \overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors $Cov(x,y) = 0$.

$Var(aX+Y) = a^2 Var(X) + 2a\,Cov(X,Y) + Var(Y), a \in \mathbb{R}$

$|Cov(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$

$|Cov(x,y)| = \sigma_x \sigma_y \Leftrightarrow y = \epsilon\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + b$ avec $\epsilon \in \{-1,1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

8

Un **ajustement statistique** consiste à déterminer une fonction f dont le graphe approche au maximum le nuage de points de la distribution.

Méthode des moindres carrés :

$y = ax + b$ est la droite des moindres carrés de y en x ou la droite de régression de y en x

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}, b = \overline{y} - a\overline{x}$$

droite des moindres carrés de x en y : $x = a'y + b'$

$$a' = \frac{Cov(x,y)}{V(y)} \text{ et } b' = \overline{x} - a'\overline{y}$$

Les deux droites se coupent au point moyen du nuage $(\overline{x}, \overline{y})$.

Les deux droites sont généralement distinctes.

Les droites seront confondues si et seulement si $r = \pm 1$.

Leurs coefficients directeurs sont de même signe et du signe de r_{xy}

Si $r_{xy} > 0$ les deux droites sont ascendantes.

Si $r_{xy} < 0$ les deux droites sont descendantes.

9

Coefficient de corrélation

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Le coefficient de corrélation vérifie : $|r_{xy}| \leq 1$.

$|r_{xy}| = 1 \Leftrightarrow y = ax + b$, avec $a = \pm\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$r_{xy} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} > 0$ et $r_{xy} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{\sigma_y}{\sigma_x} < 0$

Si $|r_{xy}| \simeq 0$, alors il n'existe pas de relation affine entre x et y

r_{xy}^2 est le coefficient de **détermination** : il est égal à la proportion de variation expliquée par la droite des moindres carrés.

Indices

1

Un **indice** est un nombre sans dimension qui décrit l'évolution d'une grandeur économique (prix, quantité, production...) dans le temps ou dans l'espace.

2

Les indices simples/élémentaires

Un **indice simple** (ou élémentaire) mesure la variation **d'une** grandeur dans le temps ou dans l'espace, entre deux dates : 0 (date de base) et *t* (date courante).

Soit une grandeur simple g prenant la valeur g_0 à la date 0 et la valeur g_t à la date t. L'indice simple de g, à la date t par rapport à la date 0, est le rapport :

$I_{t/0} = \frac{g_t}{g_0}$ (en base 1), (on note $I_{t/0}$ ou $I^g_{t/0}$),

ou

$I_{t/0} = \frac{g_t}{g_0} \times 100$ (en base 100).

- Si $I_{t/0} > 1$, la grandeur a augmenté.
- Si $I_{t/0} < 1$, la grandeur a diminué.

Propriétés des indices élémentaires :

- Ils sont **transférables** :

$$I_{t/t'} = I_{t/t''} \times I_{t''/t'}$$

- Ils sont **réversibles** :

$$I_{t/t'} = \frac{1}{I_{t'/t}}$$

- Ils vérifient la propriété de la **multiplication** :

$$I^{x \times y}_{t/t'} = I^x_{t/t'} \times I^y_{t/t'}$$

3

Les indices synthétiques/complexes

Un indice synthétique permet de mesurer l'évolution de plusieurs grandeurs dans le temps ou dans l'espace. On les utilise notamment pour calculer le prix d'un panier de biens.

L'indice global (ou indice valeur) d'un panier à la période t par rapport à la période 0 mesure l'évolution du budget total consacré à ce panier :

$$I_{t/0} = \frac{P_t.Q_t}{P_0.Q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i}$$

L'indice de Laspeyres est une moyenne pondérée des indices élémentaires.

Indice des prix :

$$L^p_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i . q_0^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i . q_0^i} = \frac{P_t.Q_0}{P_0.Q_0}$$

Indice des quantités :

$$L^q_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i . q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i . q_0^i} = \frac{P_0.Q_t}{P_0.Q_0}$$

L'indice de Paasche est une moyenne harmonique des indices élémentaires.

Indice des prix :

$$P^p_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i . q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i . q_t^i} = \frac{P_t.Q_t}{P_0.Q_t}$$

Indice des quantités :

$$P^q_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i . q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_t^i . q_0^i} = \frac{P_t.Q_t}{P_t.Q_0}$$

L'indice de Fisher est la moyenne géométrique des indices de Laspeyres et de Paasche.

Indice des prix :

$$F^p_{t/0} = \sqrt{L^p_{t/0} \times P^p_{t/0}}$$

Indice des quantités :

$$F^q_{t/0} = \sqrt{L^q_{t/0} \times P^q_{t/0}}$$

4

Les indices boursiers

Un **indice boursier** mesure l'évolution dans le temps d'un marché financier ou d'un secteur spécifique du marché.

Pour n sociétés, la capitalisation boursière totale à la date t est :

$$\sum_{i=1}^{n} C_t^i N_t^i$$

Indice de marché (ou indice par capitalisation boursière) :

$$I_{t/0} = \frac{\sum_i C_t^i N_t^i}{\sum_i C_0^i N_0^i} \times$$

Séries chronologiques

1

Une **série chronologique** est une distribution statistique à deux dimensions dont l'une est le temps.

2

- La variable étudiée : y
- Le temps : t
- La variable y est liée fonctionnellement à la variable t
- t1, t2, . . . , tn sont les n instants successifs d'observation.
- t prend les valeurs ti avec i, de 1 à n.
- y_{t_i} (ou y_t) est la valeur mesurée à l'instant t_i
- y prend les valeurs y_t
- La série chronologique est notée :

$$(t_i, y_{t_i})_{1 \leq i \leq n} \text{ ou } (t_i, y_t)_{1 \leq i \leq n}$$

3

Composantes d'une série chronologique

La tendance/ le trend : ***ft***

- Traduit l'évolution de long terme du phénomène observé
- Reflète la direction générale de la série : hausse, baisse ou stabilité.

Les **variations saisonnières** : **St**

- Traduisent des comportements liés au calendrier ou aux habitudes récurrentes.
- Fluctuations périodiques qui se répètent à intervalles réguliers (mois, trimestre, année, etc.).

Les variations accidentelles/résiduelles : εt

- Fluctuations irrégulières et aléatoires, imprévisibles à court terme.
- Sur un petit nombre d'année, les εt se compensent.
- Regroupent les événements exceptionnels : conditions météorologiques extrêmes, grèves, crises, guerres, etc.

4

Modèles de décomposition

Modèle additif

La série s'exprime comme la somme de ses trois composantes :

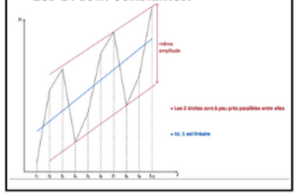
yt =ft +St +εt

En négligeant les fluctuations irrégulières (εt ≈ 0), la série s'écrit :

yt = ft + St

La moyenne des variations saisonnières est nulle

Graphiquement, les amplitudes des St sont constantes.



Modèle multiplicatif

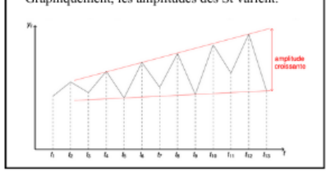
La série s'écrit sous la forme :

yt =ft*St*εt

yt = ft*St *avec εt intégrés dans le trend*

Les variations saisonnières varient avec la tendance

Graphiquement, les amplitudes des St varient.



Si *p* est la période du mouvement saisonnier :

$$\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} S_t = 1$$

(pour neutraliser l'influence des *St*)

On pose *St* =1+*st*, alors $\overline{s}$ =0

5

Estimation des composantes de la série

Trend

Méthode des moyennes mobiles

On appelle moyenne mobile d'ordre p (p < n) la série constituée par les moyennes arithmétiques suivantes :

Si p est impair, p=2m+1

$$M_p(t) = \frac{1}{p}\sum_{k=-m}^{m} y_{t+k}.$$

Si p est pair, p=2m

$$M_p(t) = \frac{1}{p}\left(\frac{y_{t-m}}{2} + \sum_{k=-m+1}^{m-1} y_{t+k} + \frac{y_{t+m}}{2}\right)$$

Ajustement linéaire

Modèle additif :

$$a = \frac{Cov(t, y)}{V(t)}, b = \overline{y}_t - a\overline{t}$$

L'expression ajustée de la série devient : yt = at + b + St

Modèle multiplicatif :

ln(yt) =ln(ft) +ln(St)

Coefficients saisonniers

Modèle multiplicatif

St = yt/ft/St = yt/Mp(t)

Correction des coefficients : $S'_j = S_j/\overline{S}$

La série corrigée des variations saisonnières (CVS) est :

$$y_t^* = y_t/S'_j$$

La série ajustée est :

$$\widehat{y}_t = f_t \times S'_j \text{ ou } \widehat{y}_t = M_p(t) \times S'_j$$

Modèle additif

St =yt ft/St =yt Mp(t) P

Correction des coefficients : S'j=Sj - , $\overline{S}$ ì $\overline{s} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} s_j$

La série corrigée des variations saisonnières (CVS) est :

$$y_t^* = y_t - S'_j$$

La série ajustée est :

$$\widehat{y}_t = f_t + S'_j \text{ ou } \widehat{y}_t = M_p(t) + S'_j$$

Variations accidentelles

Modèle additif :

$$\varepsilon_t = y_t^* - f_t \text{ ou } \varepsilon_t = y_t^* - M_p(t)$$

$$\varepsilon_t = y_t - \widehat{y}_t$$

Modèle multiplicatif :

$$\varepsilon_t = y_t^*/f_t \text{ ou } \varepsilon_t = y_t^*/M_p(t)$$

$$\varepsilon_t = y_t/\widehat{y}_t$$